

תרגיל 9 ביסודות תורת הפונקציות המרוכבות

1. מצא את השאריות של הפונקציות הבאות בכל נקודות סינגולאריות:

$$f(z) = z^n \sin \frac{1}{z} \quad \text{ג.} \quad f(z) = \cos \frac{1}{z-2} \quad \text{ב.} \quad f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)} \quad \text{א.}$$

2. חשב את האינטגרלים:

$$\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, n < R^2 < n+1, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{כאשר} \quad \int_{\Gamma_R} \frac{z \, dz}{e^{2\pi i z^2} - 1} \quad \text{א.}$$

$$\Gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, r > 2\} \quad \text{כאשר} \quad \int_{\Gamma_r} \sqrt{\frac{z}{z+2}} \, dz \quad \text{ב.}$$

3. מצא את פתוחי Laurent של הפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

$$|z-2| \neq 0, \frac{\sin z}{z-2} \quad \text{ג.} \quad 0 < |z|, \frac{1-e^{-z}}{z^3} \quad \text{ב.} \quad 0 < |z|, \frac{1}{z} \sin^2 \frac{2}{z} \quad \text{א.}$$

4. מהו סוג הנקודה $z=0$ כלפי הפונקציה $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$?

5. הראה כי $z=0$ הינה נקודת סינגולאריות עיקרית עבור הפונקציה $f(z) = \cos(e^{1/z})$.

6. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה בעלת קוטב ב- ∞ . מצא את $f(z)$.

7. תהי $f(z)$ אנליטית ב- $|z| \leq 1.2$. הראה כי אם $|f(z)| < 1$ עבור $|z|=1$ אזי למשוואה

$$f(z) = z^n \quad \text{בדיוק } n \text{ שורשים ב- } |z| < 1.$$

8. חשב $\int_C \tan z \, dz$ כאשר C מעגל $|z|=6$ מכון חיובית.

9. חקור את התכנסות הסדר $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{z^n}{3^n + 1}$.